

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ В НЕУПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ ЧАСТИЦ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ РЕЛЕЯ

Т.Г.Ефимова, В.А.Лескин*, Г.А.Ососков, К.Д.Толстов,
Н.И.Чернов

Рассматривается статистическая задача представления экспериментального распределения поперечных импульсов в виде разложения по распределениям Релея. Предложена методика, позволяющая с достаточной точностью и достоверностью выбрать число членов разложения (один или два) и оценить их параметры. Границы применимости метода определены с помощью численного эксперимента. Приведены результаты использования методики для обработки данных неупругих столкновений ядер ^{22}Ne с ядрами фотозмульсии при импульсе 4,1 А ГэВ/с.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Expansion of Transverse Momenta in Inelastic Collisions of Particles into Reley Distributions

T.G.Efimova et al.

The statistical problem to expand the experimental distribution of transverse momenta into Reley distributions is considered. The method is proposed which allows us to estimate the number of the expansion terms (one or two) and their parameters with sufficient precision and reliability. The range of applicability of the method is defined by a numerical experiment. The results of using the above technique for data processing of inelastic collision of nuclei ^{22}Ne with the photoemulsion nuclei by momenta 4.1 A GeV/c are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Таджикской ССР,
Душанбе.

Введение

При исследовании столкновений быстрых частиц импульсные распределения продуктов взаимодействия дают сведения о механизме столкновения. В случае, когда поляризационные явления отсутствуют, имеет место симметрия по оси столкновения. Информация о динамике столкновения, которая может быть получена при анализе закона сохранения продольного импульса сталкивающихся вторичных частиц и распределения продольного импульса P_{\parallel} , осложняется неоднозначностью системы центра масс, так как априори не известно число нуклонов снаряда и ядра мишени, относящихся к системе центра.

Этого осложнения нет при рассмотрении поперечного импульса P_{\perp} , так как P_{\perp} одинаков в системе центра масс и в лабораторной системе.

Информацию о спектре P_{\perp} интересно иметь для определенных вторичных частиц, а также для событий, где их число достаточно велико, то есть кинематика неоднозначна. Эта информация может быть получена в инклюзивной постановке опыта. Однако сам процесс генерации вторичных частиц может быть либо прямым, либо он протекает через промежуточные состояния. В результате распределение по P_{\perp} является смесью отдельных процессов, и одной из задач обработки опытных данных является соответствующая их дешифровка.

В случае одного канала генерации рассматриваемых частиц обе декартовы оси для P_{\perp} равноправны и распределения, подчиняясь закону случая, будут по ним гауссовыми. В результате для P_{\perp} получим релеевское распределение:

$$w(P_{\perp}) dP_{\perp} = \frac{2P}{\langle P_{\perp}^2 \rangle} \exp(-P_{\perp}^2 / \langle P_{\perp}^2 \rangle). \quad (1)$$

При наличии двух каналов генерации частиц во втором канале, даже если он имеет место в том же столкновении, распределение P_{\perp} также будет релеевским, но, очевидно, с другим значением единственного параметра $\langle P_{\perp}^2 \rangle$. Таким образом, P_{\perp} определяется из опытных значений вкладом отдельных каналов. Нахождение соответствующих параметров $\langle P_{\perp}^2 \rangle$ сводится при этом к разложению спектра в ряд вида

$$w(P_{\perp}) = \sum_{i=1}^k a_i \frac{2P_{\perp}}{\langle P_{\perp}^2 \rangle_i} \exp(-P_{\perp}^2 / \langle P_{\perp}^2 \rangle_i). \quad (2)$$

Очевидно, что нахождение величин a_1 и $\langle P_{\perp}^2 \rangle_1$ из экспериментального набора значений P_{\perp} будет более точным в случаях, когда a_1 различаются существенно, а набор экспериментальных значений достаточно велик.

Получение набора значений P_{\perp} во всем диапазоне углов вылета θ вторичных частиц по отношению к оси столкновения в ряде опытов затруднено. В инклюзивной постановке опытов, например, необходимо определение эффективности регистрации и набор статистики в зависимости от θ . В нашем случае вторичные частицы регистрировались в фотоэмульсиях во всем диапазоне углов θ , однако измерения импульсов производились при ограничении углов наклона α частиц к плоскости фотоэмульсии, начиная с некоторого угла $\theta_{гр}$.

Таким образом, частицы с углом $\theta \leq \theta_{гр}$ измерялись все, то есть их "статистический вес" w_s равен 1, а для частиц с $\theta > \theta_{гр}$

$$w_s = \frac{\pi}{2 \arcsin(\sin \alpha / \sin \theta)}. \quad (3)$$

Это также учтено в настоящей работе, где предложена методика статистической обработки экспериментальной выборки из смеси распределений вида (2) при двух членах разложения. По этой методике исследовались неупругие столкновения ядер ^{22}Ne с ядрами фотоэмульсии при импульсе 4,1 А ГэВ/с и были определены поперечные импульсы релятивистских π^+ -мезонов и протонов.

1. Постановка математической задачи

Ниже мы будем придерживаться обозначений, принятых в математической литературе, в частности параметр релеевского распределения (1) будем обозначать

$$\sigma^2 = \langle P_{\perp}^2 \rangle / 2.$$

Задается выборка из экспериментальных значений поперечных импульсов

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (4)$$

относительно которых могут быть выдвинуты следующие две гипотезы:

— гипотеза H_0 : величины x_1 распределены по закону Релея, то есть имеют плотность распределения (1) с $\langle P_{\perp}^2 \rangle = 2\sigma^2$;

— гипотеза H_1 : x_i взяты из смеси двух распределений Релея:

$$f_1(x) = x \cdot \exp(-x^2/2\sigma_1^2)/\sigma_1^2 \quad \text{и} \quad f_2(x) = x \cdot \exp(-x^2/2\sigma_2^2)/\sigma_2^2 ,$$

в пропорции $c : (1 - c)$.

Дополнительное усложнение задачи: наличие статвесов w_1, w_2, \dots, w_n :

$$\sum_{i=1}^n w_i = W_n , \quad (5)$$

то есть каждое x_i входит в выборку (4) с известным весом w_i , вычисляемым по формуле (3).

Требуется:

- а) на основании выборки (1) отдать предпочтение одной из гипотез с заданным уровнем достоверности;
- б) наилучшим образом оценить параметры распределения;
- в) оценить ошибки полученных значений параметров.

2. Проверка гипотез о типе распределений

Нам будет удобнее перейти от плотностей к функциям распределений

$$F(x) = cF_1(x) + (1 - c)F_2(x) , \quad (6)$$

где $F_k(x) = \int_0^x f_k(x) dx$ ($k=1, 2$). При такой записи гипотезе H_0

соответствует либо случай $\sigma_1 = \sigma_2$, либо $c = 0$, либо $c = 1$.

Введем эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$, соответствующую (4) и (5). Для этого упорядочим выборку, построив вариационный ряд:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)} , \quad (7)$$

пусть $w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(n)}$ — перенумерованные статвесы, соответствующие членам вариационного ряда (7). $F_n(x)$ определена как

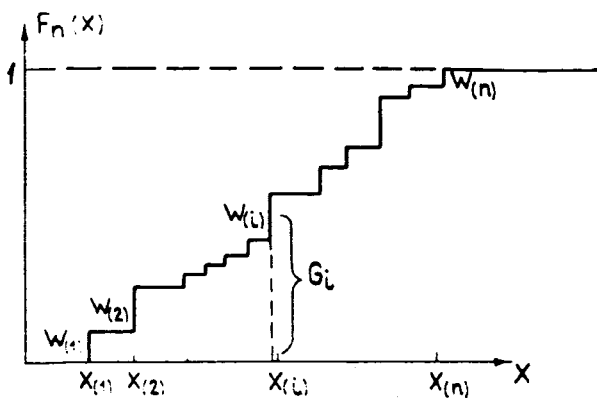


Рис. 1. Эмпирическая функция двухкомпонентного распределения Релёя.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}; \\ \sum_{\ell=1}^{i-1} w_{(\ell)}, & x_{(i-1)} < x \leq x_{(i)}; \\ 1, & x > x_{(n)}. \end{cases} \quad (8)$$

Выбор между гипотезами можно сделать путем сравнения по какому-либо критерию функций $F(x)$ и $F_n(x)$, предполагая верной гипотезу H_0 , то есть вычисляя $F(x)$ при $c = 1$ и при наилучшим образом подобранном параметре $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Мы предпочли проверять справедливость гипотезы H_0 , так как в этом случае параметр σ поддается достаточно простой оценке методом максимального правдоподобия:

$$\hat{\sigma}^2 = 1/2W_n \cdot \sum_{i=1}^n w_i x_i^2. \quad (9)$$

В качестве критерия для сравнения теоретического и эмпирического распределений мы выбрали критерий $\omega^{2/1/}$, несколько модифицировав его для учета статвесов:

$$\omega^2 = W_n \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F_n(x)]^2 dF(x). \quad (10)$$

Если обозначить $F_i = F(x_{(i)})$, $G_i = (w_{(i)} / 2 + \sum_{\ell=1}^{i-1} w_{(\ell)})$ (см.

рис.1), то путем интегрирования (10) по частям получим

$$\omega^2 = W_n (1/3 + \sum_i w_{(i)} F_i - 2 \sum_i w_{(i)} F_i G_i). \quad (11)$$

Вычисляя $F(x)$ для гипотезы H_0 с $\sigma = \hat{\sigma}$ из (9), находим $\omega_{H_0}^2$ и по таблице распределения ω^2 -критерия проверяем $\omega_{H_0}^2 < \omega_{кр}^2$, чтобы определить, проходит гипотеза H_0 или нет. Если $\omega_{H_0}^2 < \omega_{кр}^2$, то гипотеза H_0 принимается. В этом случае нет необходимости вычислять $F(x)$ для гипотезы H_1 и находить $\omega_{H_1}^2$, так как по своей сути (аппроксимация с большим числом параметров) $\omega_{H_1}^2$ всегда примет значение, меньшее, чем $\omega_{H_0}^2$.

3. Оценка параметров смеси распределений

В случае, если гипотеза H_0 отвергается, для проверки справедливости гипотезы H_1 необходимо оценить параметры c , σ_1 и σ_2 . Для этого воспользуемся тем, что линейная зависимость $F(x)$ от c ведет к квадратичной зависимости ω^2 как функции c . В самом деле, вводя обозначения $F_{2i} = F_2(x_{(i)})$, $D_i = F_1(x_{(i)}) - F_2(x_{(i)})$, получаем из (11)

$$\omega^2 = W_n \left(\frac{1}{3} + c^2 \sum_i w_{(i)} D_i - 2c \sum_i w_{(i)} D_i (G_i - F_{2i}) + \sum_i w_{(i)} F_{2i}^2 - 2 \sum_i w_{(i)} F_i G_i \right), \quad (12)$$

то есть получаем $\omega^2 = a_0 + a_1 c + a_2 c^2$ (см.рис.2). Отсюда легко найти

$$c_{\min} = -a_1 / 2a_2 \quad (13)$$

— оптимальное представление параметра c через выборочные

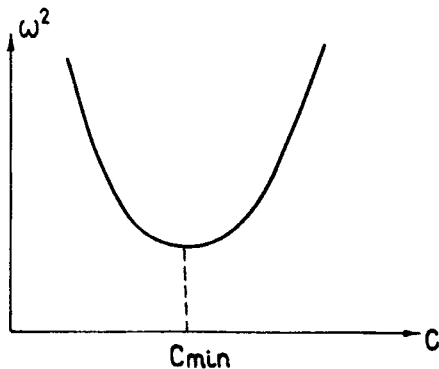


Рис.2. Параболическая зависимость ω^2 от c .

значения и неизвестные пока параметры σ_1 и σ_2 . Подставляя c_{\min} в (12), мы фактически исключаем c , то есть делаем ω^2 функцией величин (7) и σ_1, σ_2 :

$$\omega^2 = \Phi(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}; \sigma_1, \sigma_2). \quad (14)$$

Для получения оценок $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ как функций, минимизирующих функционал (14), применялась процедура поиска глобального минимума ω^2 методом наискорейшего спуска с оптимальным выбором шага. В качестве начальных выбирались значения $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$, полученные путем применения оценок (9) по очереди к 5% точек, лежащих в "хвостах" выборки (7) (при этом предполагалось, что эти 5-процентные "хвосты" содержат в основном точки либо из первой, либо из второй компоненты смеси).

После получения оценок $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ параметр c может быть оценен по формуле (13). Необходимо также вычислить $\omega_{H_1}^2$, чтобы убедиться в справедливости критерия $\omega_{H_1}^2 < \omega_{кр}$.

4. Оценка ошибок параметров

Для каждой конкретной выборки (4) оценка ошибок может быть выполнена методом Монте-Карло, то есть путем многократного розыгрыша модели распределения (6) с параметрами $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{c}$, применения к ней вышеописанной процедуры оценки и последующего усреднения квадратов отклонений, полученных вторично оценок от величин, заложенных в модель.

Для теоретической оценки дисперсий величин следует вспомнить, что по своему определению они являются функциями упорядоченных выборочных значений (7):

$$\hat{\sigma}_1 = \theta_1(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}); \hat{\sigma}_2 = \theta_2(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}), \hat{c} = \theta_3(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}), \quad (15)$$

и воспользоваться известной приближенной формулой^{1/}:

$$\hat{\sigma}_{\theta_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial x_{(i)}} \right|^2} \hat{\sigma}_{x_{(i)}}. \quad (16)$$

К сожалению, вычислительная процедура минимизации, проведенная в предыдущем разделе, не дает нам явных зависимостей вида (15), необходимо также уметь вычислять дисперсии порядковых

статистик для выборки из распределения (6). Ниже излагаются используемые нами способы дифференцирования функций, неявно заданных в виде системы уравнений, а также приближенного определения дисперсий членов вариационного ряда.

Система уравнений, определяющих минимум ω^2 по оцениваемым параметрам, в обозначениях (15) записывается как

$$\phi_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Дифференцируя по $x_{(i)}$ эту систему, неявно задающую θ_k , мы получим систему линейных уравнений относительно нужных нам производных $\partial \theta_k / \partial x_{(i)}$:

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_{(i)}} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{(i)}} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{(i)}} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_{(i)}} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Таких систем будет n , и определителем каждой из них будет

якобиан

$$J_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta_3} \end{vmatrix}.$$

При $J_{ik} \neq 0$ получаем единственное решение $\frac{\partial \theta_k}{\partial x_{(i)}}$, $k = 1, 2, 3$,

$i = 1, \dots, n$.

Переходя к определению дисперсий порядковых статистик (7), воспользуемся известным методом преобразования выборки с произвольным законом распределения к некоему унифицированному распределению, для которого эти дисперсии известны (см., например, ^{2/}). Таким распределением служит равномерное в (0,1) распределение. Среднее и дисперсия порядковых статистик $y_{(i)}$ для него равны

$$E y_{(i)} = \frac{i}{n+1}; \quad D y_{(i)} = \frac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Распределения Релея $F(x) = 1 - \exp(-x^2/2\sigma^2)$, например, легко преобразовать в равномерное с помощью обратной функции $F^{-1}(y) = \sigma \sqrt{-2 \cdot \ln(1-y)}$, разлагая которую в ряд Тейлора относительно среднего значения, находим

$$D x_{(i)} \approx D y_{(i)} \cdot [f(F^{-1}(E y_{(i)}))], \quad f(x) = F'(x).$$

После подстановки выражений для функций распределения и плотности, а также учета (5) получим

$$D x_{(i)} \approx i \cdot \sigma_p^2 / 2W_n \ln G_1, \quad (17)$$

где σ_p^2 — дисперсия распределения Релея, равная

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 (2 - \pi/2). \quad (18)$$

Поскольку распределение (6) не допускает простого обращения, мы аппроксимировали его обычным релейевским распределением, но в итоговой формуле (17) заменили выражение (18) на выражение для дисперсии распределения смеси (6) с заменой параметров на их оценки из предыдущего раздела, то есть на выражение

$$\hat{\sigma}_{см}^2 = \left\{ c(2 - c \cdot \frac{\pi}{2}) \hat{\sigma}_1^2 + (1 - c) \left[2 - (1 - c) \frac{\pi}{2} \right] \hat{\sigma}_2^2 - \pi c(1 - c) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \right\}^2.$$

Расчеты дисперсий ошибок параметров по предложенной приближенной методике и по методу Монте-Карло практически совпали.

5. Результаты приложений и некоторые выводы

Проверкой изложенной методики явились расчеты по определению параметров распределений поперечных импульсов релятивистских π^+ -мезонов и протонов в неупругих столкновениях ядер ^{22}Ne с ядрами фотоэмульсии при импульсах 4,1 А·ГэВ/с. Результаты расчетов сведены в таблицу, в которой приведены значения средних поперечных импульсов, получаемых из $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$, а также представлены на рис.3-6.

Проведение аналогичных расчетов с помощью известной программы FUMILI ^{3/} дало результаты, совпадающие в пределах ошибок, но потребовало на порядок больших затрат машинного времени.

Весьма существенным явился вопрос о границах применимости метода. Дело в том, что задача определения параметров смеси (6) становится неустойчивой в принципе при сближении σ_1 и σ_2 , а также при стремлении c к 0 или к 1. В частности, из-за случайного разброса выборки при определении параметра c по формуле (13)

	π^\pm -мезоны		Протоны
Однокомпонентное распределение Релея	$n=200$	873	632
$\hat{\sigma}_p$	0,235	0,24	0,41
ω^2	3,02	18,14	2,17
Двухкомпонентное распределение Релея	200	873	632
c	$0,40 \pm 0,11$	$0,57 \pm 0,01$	$0,23 \pm 0,01$
$\hat{\sigma}_1$	$0,13 \pm 0,004$	$0,144 \pm 0,004$	$0,205 \pm 0,002$
$\hat{\sigma}_2$	$0,26 \pm 0,01$	$0,326 \pm 0,002$	$0,466 \pm 0,002$
ω^2	0,54	0,17	0,1
P_\perp , ГэВ/с	$0,16 \pm 0,005$	$0,18 \pm 0,005$	$0,26 \pm 0,003$
P_\perp , ГэВ/с	$0,33 \pm 0,01$	$0,41 \pm 0,003$	$0,58 \pm 0,003$

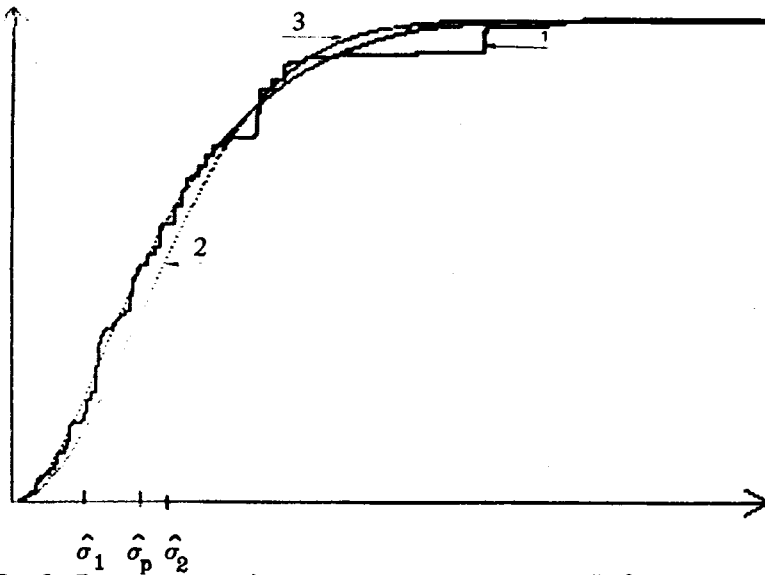


Рис.3. Результаты подгонки к экспериментальной функции распределения $F_n(x)$ поперечных импульсов π^\pm -мезонов при $n=200$ (кривая 1), функций однокомпонентного распределения Релея (кривая 2, $\hat{\sigma}_p=0,215$) и смеси (6) (кривая 3, $\hat{\sigma}_1=0,1283$, $\hat{\sigma}_2=0,2633$, $\hat{c}=0,4005$).

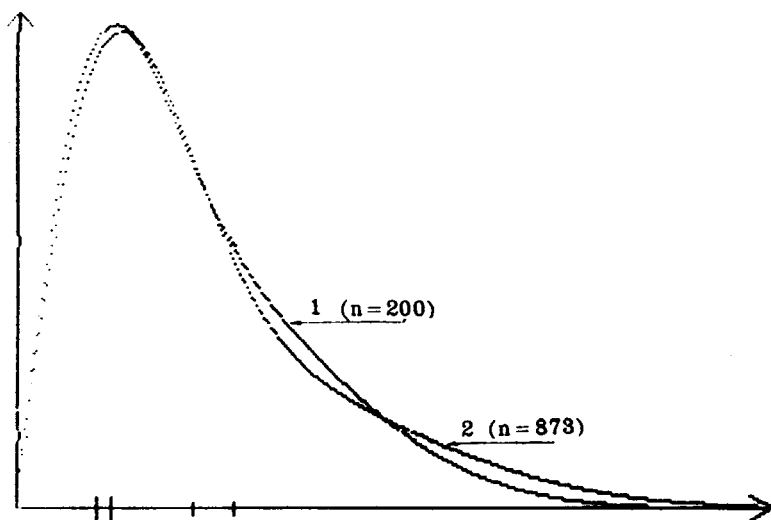


Рис.4. Сравнение плотностей двухкомпонентного распределения Релея для π^+ -мезонов, построенных по оценкам параметров из таблицы (1 и 2 колонки) при $n = 200$ (кривая 1) и $n = 873$ (кривая 2).

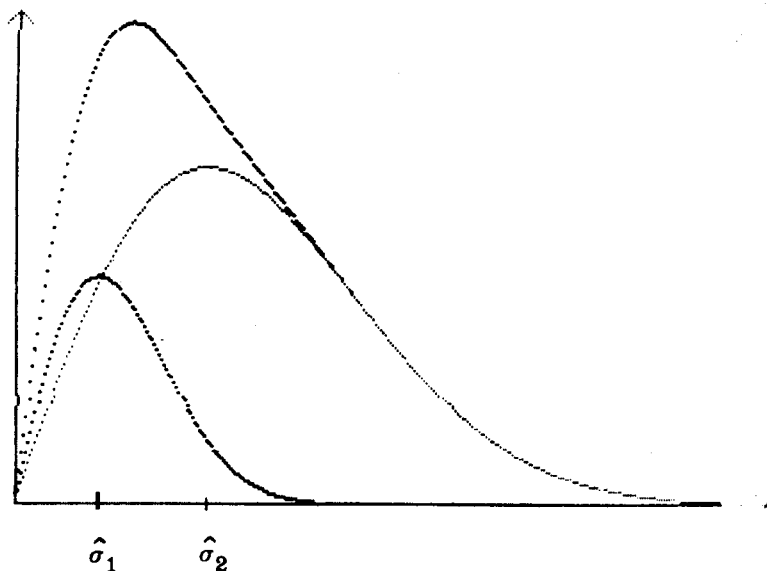


Рис.5. Плотности двухкомпонентного распределения Релея для протонов и составляющих эту смесь релеевских плотностей, построенных по оценкам параметров из таблицы при $n = 632$.

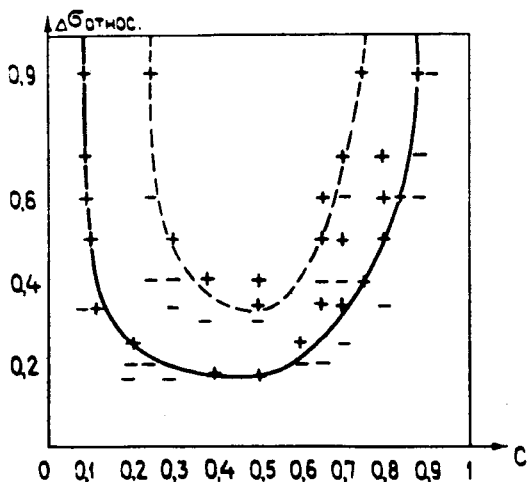


Рис.6. Области устойчивости для процедуры оценок параметров смеси при $n=800$ (сплошная кривая) и $n=200$ (пунктирная).

парабола на рис.2 становится плоской и ошибка определения параметра резко возрастает.

В этой связи был проделан численный эксперимент, в котором при разных комбинациях c , σ_1 и σ_2 было смоделировано свыше сотни выборок и определены параметры c и σ_1 , σ_2 .

Результаты эксперимента представлены на рис.6, где по оси ординат отложена величина относительной ошибки

$$\Delta\sigma = |\sigma_1 - \sigma_2| / (\sigma_1 + \sigma_2),$$

по оси абсцисс — значение c ($\Delta\sigma$ и c были заложены в модель). Кривые проведены по точкам, в которых произошло нарушение работы программ или выход ошибки за 4-5 среднеквадратичных отклонений.

Заметная асимметрия кривой при $n=800$ объясняется асимметрией распределения Релея, которая начинает сказываться при такой большой статистике.

Таким образом, хотя поставленная задача относится к разряду некорректных, однако ее решение дало близкие значения при использовании существенно различной статистики (см. таблицу), что указывает на эффективность выбранного приближения.

В целом полученные результаты доказывают наличие двух значений средних поперечных импульсов протонов и пионов в столкновениях ядер ^{22}Ne с ядрами при импульсе 90 ГэВ/с.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Ф.Г.Лепехину за советы и плодотворную дискуссию при подготовке публикации.

Л и т е р а т у р а

1. Дунин-Барковский И.В., Смирнов М.В. — Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М.: Гостехиздат, 1955.
2. Дэйвид Г. — Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.
3. Соколов С.М., Силин И.Н. — Препринт ОИЯИ Д-810, Дубна, 1961.

Рукопись поступила 17 апреля 1989 года.